مبدأ الثنوية في جبر بول:

لقد رأينا من تعريف جبر بول أن كل خاصية تتكون من جزئين ونلاحظ أن كل جزء يمكن الحصول عليه من الآخر بالمبادلة بين العمليتين (ضرب وجمع) وبين العنصرين (0) و(1) فمثلاً تسمى العبارة $x.1=x$ ثنوية العبارة $x+0=x$

وهكذا نجد أنه في الجبر البولياني إن كل نظرية مستنتجة من المبادئ الخمسة السابقة للجبر البولياني $(B,+,.,',0,1)$ تبقى صحيحة عندما نستبدل إحدى العمليتين (+) و(.) بالأخرى والعنصران (0) و(1) أحدهما بالآخر

لذا بواسطة ثنوية في جبر بول يكتفي بالبرهان على نظرية ما ونستنتج مباشرة ثنويتها.

خواص جبر بول:

مبرهنة: ليكن $(E,+,.,',0,1)$ جبراً بوليانياً عندئذ: إن عناصر E والعمليات عليها تحقق الخواص التالية:

(1) قوانين اللانمو: $x+x=x$, $x.x=x$

(2) $x.0=0$, $x+1=1$

(3) إذا كان x أي عنصر من E وكان a عنصراً من E حيث يكون

$$a.x=0 \;,\; a+x=1 \Rightarrow a=x'$$

(4): $1'=0$, $0'=1$, $x''=(x')'=x$

(5) قوانين ديمورغان

$$(x.y)'=x'+y'$$

$$(x+y)'=x'.y'$$

(6) قوانين الامتصاص:

$$x.(x+y)=x \quad ; \quad x+x.y=x$$

الإثبات:

(1)
$$(x+x)=(x+x).1$$
$$=(x+x).(x+x')$$
$$=x+\underbrace{x.x'}_{=0}=x+0=x$$

$$x.x=x$$

(2)

$$x+1 = x+(x+x') = (x+x)+x'$$
$$= x+x' = 1$$

(3)

$$x' = x'.1 = x'(a+x) = x'.a + \underbrace{x'.x}_{=0}$$
$$= ax' + ax = a(x'+x) = a.1 = a$$

(4)

لدينا حسب تعريف المتمم x' للعنصر x

$$x+x' = 1 \quad , \quad x.x' = 0$$
$$\Rightarrow (x')' = x$$
$$1+0 = 1 \quad , \quad 1.0 = 0 \Rightarrow$$
$$1' = 0 \quad , \quad 0' = 1$$

(5)

- $$(x+y)+x'.y' = ((x+y)+x')((x+y)+y')$$
$$= (1+y)(1+x) = 1.1 = 1$$

- $$(x+y).(x'y') = x(x'y') + y.(x'y')$$
$$= (xx')y' + (yy').x'$$
$$= 0.y' + 0.x' = 0+0 = 0$$

اما القانون الثاني من قوانين ديمورغان ينتج حسب مبدأ الثنوية في جبر بول.

(6)

$$x.(x+y) = x+xy = x.1 + xy =$$
$$= x(1+y) = x.1 = x$$

ان هذه الخواص بالاضافة الى الشروط الواردة في تعريف جبر بول تفيدنا في براهين النظريات ذات العلاقة بجبر بول وكذلك في تبسيط واختصار التعابير البوليانية وتصميم الدارات في الحواسيب الالكترونية.

أمثلة :

[1] - أثبت أن :

$$a(a'+b) = ab$$
$$a + a'b = a + b$$

الحل :

$$a(a'+b) = \underbrace{aa'}_{=0} + ab = 0 + ab = ab$$

والقضية الثانية صحيحة حسب مبدأ الثنوية في جبر بول .

[2] - أثبت أن :

$$a + b(a+c) = (a+b)(a+c)$$
$$a(b+ac) = ab + ac$$

الحل :

$$a(b+ac) = ab + ac$$

[3] - أثبت أن في جبر بول :

$$(a+b)(a'+c)(b+c) = (a+b)(a'+c)$$
$$ab + a'c + bc = ab + a'c$$

الحل :

$$f_1 = (a+b)(a'+c)(b+c) = (a+b)(a'+c)(a.a' + b + c)$$

$$= (a+b)(a'+c)((a+b)+c)((a'+c)+b)$$
$$= (a+b)((a+b)+c)(a'+c)((a'+c)+b)$$

$$= (a+b)(a'+c) = f_2$$

القضية الثانية (العبارة الثانية) صحيحة حسب مبدأ الثنوية في جبر بول .

[4] - أوجد متمم العبارة التالية :

$$f = xy + xyz' + x'y'$$

الحل:

$$f' = (xy + xyz' + x'y')'$$
$$= (xy)' + (xyz)' + (x'y')'$$

$$= (x' + y')\cdot(x' + y' + z)\cdot(x + y)$$

ملاحظة:

للحصول على متمم عبارة بوليانية f نقوم بالمبادلة بين المعاملتين (+ و .) واخذ المتمم لكل متغير فيها.

جبر بول الجزئي

تعريف: (1) -

لتكن B مجموعة جزئية من جبر بول (١، ٠، '، .، +، E) إذا كانت E تحتوي العنصرين (٠، ١) فانه يسمى جبراً بوليانياً جزئياً من جبر بول E اذا كانت تحت مقصور العمليات ~~محققة~~ في E تحقق جميع شروط جبر بول.

تعريف (2) -

ليكن (١، ٠، '، .، +، B) جبر بول ولتكن $A \subseteq B$ عندئذ ان A هي جبر بول جزئي من B إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية:

(1) - A تحوي العنصرين ١، ٠

(2) - $\forall x \in A \Rightarrow x' \in A$

(3) - $\forall x, y \in A \Rightarrow$

$x + y \in A$ ، $x \cdot y \in A$

أمثلة:

1 - إذا كانت: (١، ٠، '، .، +، B) جبر بول وكان $x \in B$ بحيث $1 \neq x \neq 0$ عندئذ ان مجموعة العناصر $\{0, x, x', 1\}$ تشكل جبر بول جزئي من B ويسمى بجبر بول الجزئي المولد بالعنصر x او بالعنصر x'.

2 - $(\rho(E), \cup, \cap, ', \phi, E)$ حيث E هي مجموعة غير منتهية من العناصر. ~~[illegible]~~ هل تشكل جبر بولياني جزئي؟

إن المجموعات الجزئية المنتهية من E تشكل شبكة جزئية توزيعية من B
ولكن لا تشكل جبر بول جزئي.

[3] إن $D(30)$ جزئية من $D(6)$ لكن لا تشكل جبر بول جزئي من $D(30)$
ولكن $D(6)$ بحد ذاتها هي جبر بول

[4] - $D(70) = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$

هي جبر بول.
إن المجموعة الجزئية:

$A_1 = \{1, 2, 35, 70\}$

هي جبر بول جزئي.

$A_2 = \{1, 7, 10, 70\}$
$A_3 = \{1, 5, 14, 70\}$

~~الجبر~~ كلاً جبور جزئية من $D(70)$

الجداء المباشر والإيزومورفيزم البولياني:

تعريف:
إذا كان $(A, +, \cdot, ', 0, 1)$ و $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ جبرين بوليانيين عندئذ أن الجداء الديكارتي $A \times B$ يحقق الشروط التالية.

1) $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$
2) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
3) $(x, y)' = (x', y')$

$0 = (0_A, 0_B)$ و $1 = (1_A, 1_B)$

يسمى بالجداء المباشر للجبرين البوليانيين A، B ونلاحظ أنه يحقق جميع شروط الجبر البولياني

:

الهومومورفيزم البولياني:

تعريف: إذا كانت f دالة

$$f : A \longrightarrow B$$

عندئذ يسمى f هومومورفيزم بولياني إذا تحققت الشروط الآتية:

1)- $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2)- $f(x.y) = f(x) . f(y)$

3)- $f(x') = (f(x))'$; $\forall\ x, y \in A$

وإذا كان الهومومورفيزم البولياني تقابل (متباين وغامر) يسمى إيزومورفيزم. أي (بالإضافة إلى كونه هومومورفيزم بولياني (تقابل ومتباين) يسمى إيزومورفيزم بولياني)

نتيجة:

$$f(0_A) = f(x.x') = f(x) . f(x')$$
$$= f(x) . (f(x))'$$
$$= 0_B$$

$$f(1_A) = f(x+x') = f(x) + f(x')$$
$$= f(x) + (f(x))'$$
$$= 1_B$$

ملاحظة:

إذا كانت f دالة من جبر بول A إلى جبر بول B عندئذ الشروط التالية متكافئة:

(1) - f هومومورفيزم بولياني،

(2)- $f(x.y) = f(x) . f(y)$ ، $f(x') = (f(x))'$

(3)- $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(x') = (f(x))'$

الإثبات:

(1) ⟵ (2) :

هذا والمطلوب

② ⟸ ③

لنفرض أن المساواتين في (2) محققة

$f(x+y) = f(x''+y'')$

حسب ديمورغان نجد:

$= f(x' \cdot y') = (f(x' \cdot y'))'$

$= (f(x') \cdot f(y'))' = ((f(x))' \cdot (f(y))')'$

$= f(x')' + f(y')' = f(x'') + f(y'') = f(x) + f(y)$

③ ⟸ ①

$f(x \cdot y) = f(x'' \cdot y'')$

$= (f(x' + y'))'$

$= (f(x') + f(y'))'$

$= f(x')' \cdot f(y')' = f(x'') \cdot f(y'') =$

$= f(x) \cdot f(y)$

اي ان الشروط متكافئة.

كثيرات الحدود البوليانية، مجموع الجداءات القانوني (الصورة الكاملة لنواتج الضرب).

انتهت المحاضرة